

## Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 3



Продолжаем знакомить читателей с объемной работой «Неассоциированная пластичность для дисперсных грунтов, бетона и скальных пород» [3], написанной П.А. Вермеером и Р. Де Борстом по литературным и собственным данным в 1984 году и опубликованной в журнале *Hegeon* (Нидерланды) на английском языке. В первой части [1] мы рассмотрели ее общее содержание, во второй [2] – подробнее остановились на дилатансии и трехосных испытаниях. Здесь будет рассмотрена модель, пренебрегающая эффектами упрочнения или разупрочнения материалов (так называемая неупрочняющаяся модель).

Аналитическая служба  
[info@geoinfo.ru](mailto:info@geoinfo.ru)

### О необходимости модели, не учитывающей упрочнение или разупрочнение

П.А. Вермеер и Р. Де Борст в своей работе [3] отмечают, что при анализе устойчивости грунта или другого материала необходимо учитывать простоту и время работы компьютера. А поскольку модель, которая пренебрегает эффектами упрочнения и разупрочнения, называемая для краткости неупрочняющейся, часто дает такие же хорошие результаты, как и более сложные модели, то эффективные компьютерные программы

должны включать ее в качестве основного варианта выбора (она графически изображена на рис. 1, уже приводившемся в части 2 [2]). Поэтому авторы и приводят далее ход разработки такой модели, считая это необходимым для читателей, которые не очень хорошо знакомы с неассоциированной теорией пластичности.

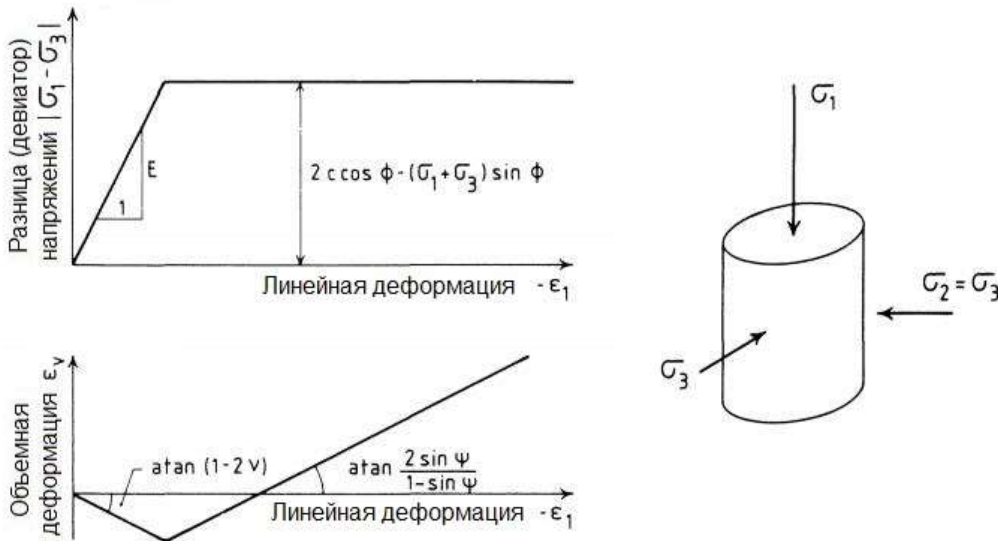


Рис. 1. Билинейная идеализация результатов трехосных испытаний [2, 3]

### Об условиях плоской деформации. Общие уравнения

Вермеер и Де Борст напоминают, что в механике грунтов ситуации с плоской деформацией (дамбы, шпунтовые стенки, подпорные стены) так же распространены, как и случаи с плоской нагрузкой в строительной механике (балки, плиты, обшивки). Поэтому они и решили остановиться на модели для условий плоской деформации, тем более что в дальнейшем, оттолкнувшись от нее, можно будет легко перейти к трехмерным напряженным состояниям.

Определение плоской деформации дается следующим уравнением в виде матриц ее компонентов:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Эти компоненты деформации относятся к декартовой (прямоугольной) системе координат (X, Y, Z).

Для рассматриваемых двумерных деформаций авторы вводят компьютерно-ориентированные обозначения (напомним, что набор символа жирным шрифтом означает столбцовую матрицу):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= (\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \quad \varepsilon_{zz})^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{zz})^T, \end{aligned} \quad (2)$$

где верхний индекс T обозначает транспонирование.

Как уже указывалось в предыдущей части [2], общее правило пластичности заключается в том, что скорость деформирования (напомним, что точка над символом означает материальную производную по времени) разлагается на упругий и пластический вклады (компоненты с верхними индексами  $e$  и  $p$  соответственно):

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p. \quad (3)$$

Для скорости упругой деформации используется закон Гука, что в результате дает:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{xx} \\ \dot{\sigma}_{yy} \\ \dot{\sigma}_{xy} \\ \dot{\sigma}_{zz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx}^e \\ \dot{\varepsilon}_{yy}^e \\ \dot{\gamma}_{xy}^e \\ \dot{\varepsilon}_{zz}^e \end{bmatrix}, \quad (4)$$

или при использовании сокращенных обозначений:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e. \quad (5)$$

Используя уравнение (3), можно получить:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p). \quad (6)$$

Авторы отмечают, что это уравнение является неполным, поскольку оно должно быть дополнено выражением для скорости пластической деформации, и обещают обсудить данный вопрос позже.

### О функции текучести

Вермеер и Де Борст предлагают рассмотреть макроскопически однородный элемент зернистого материала, который находится в статическом равновесии и равномерно напряжен (рис. 2, а).

Для любого конкретного элемента поверхности в соответствии с критерием прочности Мора – Кулона по аналогии с законом сухого трения между двумя поверхностями скольжения:

$$|\tau_n| \leq c - \sigma_n \tan \phi, \quad (7)$$

где  $\tau_n, \sigma_n$  – соответственно тангенциальная и нормальная составляющие растягивающего напряжения.

Составляющие растягивающего напряжения здесь рассматриваются как положительные, как и обычно в механике сплошных сред.

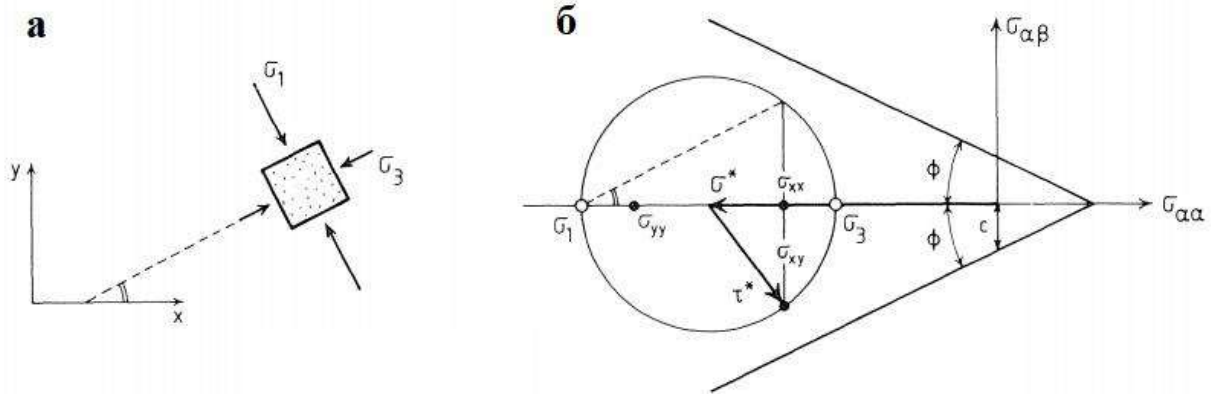


Рис. 2. Система координат и круг напряжений (Мора) для материального элемента в состоянии плоской деформации [3]

Критерий Мора – Кулона также можно сформулировать в терминах составляющих тензора напряжений (здесь авторы указывают, что этот критерий означает, что все возможные круги напряжений (Мора) ограничены конусообразной огибающей (рис. 2, б)):

$$\tau^* - \sigma^* \sin \phi - c \cos \phi \leq 0, \quad (8)$$

где центр круга Мора:

$$\sigma^* = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad (9)$$

радиус круга Мора:

$$\tau^* = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2}. \quad (10)$$

Вермеер и Де Борст отмечают, что радиус круга напряжений – это половина разности между максимальным ( $\sigma_1$ ) и минимальным ( $\sigma_3$ ) главными напряжениями, поэтому уравнение (8) идентично уже приводившемуся в предыдущей части [2] уравнению:

$$|\sigma_1 - \sigma_3| + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi \leq 0. \quad (11)$$

Если угол внутреннего трения  $\phi$  равен нулю, критерий Кулона сводится к известному критерию Треска для металлов.

В публикациях по пластичности обычно используется так называемая *функция текучести*  $f$ , чтобы отличать пластические состояния от упругих. Для критерия Мора – Кулона:



$$f = \tau^* - \sigma^* \sin \phi - c \cos \phi, \quad (12)$$

откуда видно, что уравнение (8) может быть сокращено до следующего вида:

$$f \leq 0. \quad (13)$$

Функция текучести отрицательна ( $f < 0$ ) до тех пор, пока круг Мора не соприкоснется с предельной прямой Кулона ( $f = 0$ ). Материальный элемент находится в упругом состоянии, если  $f < 0$ , и в пластическом состоянии, если  $f = 0$ , но не может выдерживать круг напряжений, который пересекает указанную предельную линию (то есть при  $f > 0$ ).

Элемент может переходить из упругого состояния в пластическое и наоборот. Для пластического течения элемент должен достигнуть пластического состояния и оставаться в нем ( $f = 0$ ), в противном случае скорость пластической деформации исчезает.

Следовательно:

$$\dot{\epsilon}^p = 0 \text{ для } f < 0 \text{ (или } \dot{f} < 0 \text{ и } f = 0). \quad (14)$$

Первое условие относится к элементу в упругом состоянии, а второе – к элементу, который переходит из пластического состояния в упругое (при разгрузке). В противном случае возникает текучесть.

### О законе текучести и потенциале пластической деформации

Авторы отмечают, что в отличие от теории упругости, где имеется взаимно однозначное соответствие между общими напряжениями и деформациями, такой однозначной взаимосвязи между пластическими деформациями и напряжениями не существует. Вместо этого принимается, что скорости пластической деформации получаются из скалярной функции  $g$  от напряжений следующим образом:

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma}, \quad (15)$$

где  $\lambda$  – неотрицательный множитель, если происходит пластическое нагружение, то есть при

$$f = 0 \text{ и } \dot{f} = 0, \quad (16)$$

тогда как этот множитель исчезает при условии (14). При этом авторы подчеркивают, что он вообще не имеет физического смысла. Например, его нельзя отождествить с вязкостью. Как рассчитывается значение  $\lambda$ , будет рассмотрено позже.

Функция  $g$  называется *потенциалом пластической деформации (пластическим потенциалом)*. Для плоских деформаций зернистого материала (как сцементированного, так и дисперсного) авторы считают подходящим следующее определение, предложенное Раденковичем (Radenkovic, 1961):

$$g = \tau^* - \sigma^* \sin \psi + \text{const}, \quad (17)$$

где  $\psi$  – угол дилатансии, который обсуждался в предыдущей части [2].

Пластический потенциал  $g$  очень напоминает функцию текучести  $f$  (Мора – Кулона). Единственное отличие состоит в том, что угол внутреннего трения  $\phi$  в этом случае заменяется углом дилатансии  $\psi$ .

Дифференцирование  $g$  по напряжениям дает закон пластического течения (текучести), необходимый при реальных вычислениях:

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx}^p \\ \dot{\epsilon}_{yy}^p \\ \dot{\gamma}_{xy}^p \\ \dot{\epsilon}_{zz}^p \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \partial g / \partial \sigma_{xx} \\ \partial g / \partial \sigma_{yy} \\ \partial g / \partial \sigma_{xy} \\ \partial g / \partial \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) / 2\tau^* + \sin \psi \\ -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) / 2\tau^* + \sin \psi \\ 2\sigma_{xy} / \tau^* \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Чтобы понять этот закон, авторы предлагают рассмотреть следующее уравнение:

$$\sin \psi = \dot{\epsilon}_v^p / \dot{\gamma}^p, \quad (19)$$

которое можно вывести из закона текучести с использованием выражений:

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}_{xx}^p + \dot{\epsilon}_{yy}^p + \dot{\epsilon}_{zz}^p = \dot{\epsilon}_{xx}^p + \dot{\epsilon}_{yy}^p, \quad (20)$$

$$\dot{\gamma}^p = \sqrt{(\dot{\epsilon}_{xx}^p - \dot{\epsilon}_{yy}^p)^2 + (\dot{\gamma}_{xy}^p)^2}. \quad (21)$$

Определение (21) соответствует определению (10) для напряжения сдвига, а сама левая часть уравнения (21) называется *скоростью пластического деформирования*.

Приведенные выше уравнения помогают найти значение угла дилатансии. Этот угол устанавливает отношение скоростей объемной (нижний индекс  $v$ ) и сдвиговой пластической деформации. Это определение согласуется с формулой, приводившейся в предыдущей части [2]:

$$\sin \psi = \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{-2\dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_v^p}, \quad (22)$$

поскольку мы можем также написать:

$$\dot{\gamma}^p = |\dot{\varepsilon}_3^p - \dot{\varepsilon}_1^p|. \quad (23)$$

Используя дополнительное уравнение

$$\dot{\varepsilon}_2^p = 0, \quad (24)$$

мы можем вывести уравнение (22) из уравнения (19).

Авторы предлагают еще лучше понять физический смысл угла дилатансии  $\psi$ , рассмотрев испытание в сдвиговой коробке, как показано на рис. 3. Материал на границе раздела между двумя половинами сдвиговой коробки образует тонкую зону сдвига. Для большей части этой зоны не будет параллельной деформации, то есть:

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\varepsilon}_{xx}^e + \dot{\varepsilon}_{xx}^p = 0. \quad (25)$$

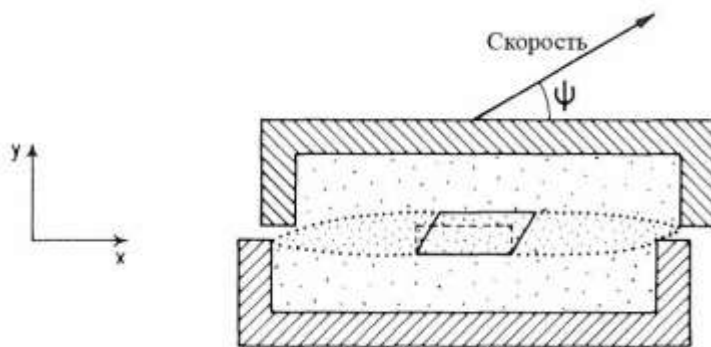


Рис. 3. Модель, предсказывающая угол подъема  $\psi$  для полосы сдвига

В начале испытания в сдвиговой коробке параллельное напряжение  $\sigma_{xx}$  может изменяться, приводя к некоторым упругим деформациям, но в конце концов значение  $\sigma_{xx}$  будет постоянным, так что упругий и пластический вклады исчезают:

$$\dot{\varepsilon}_{xx}^p = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{yy}^p / \dot{\gamma}_{xy}^p = \tan \psi. \quad (26)$$

Последнее уравнение получается путем подстановки предыдущего в уравнения (19), (20) и (21).

Тангенс угла дилатансии можно найти из выражения:

$$\dot{v}/\dot{u} = \tan \psi, \quad (27)$$

где  $\dot{v}$ ,  $\dot{u}$  – соответственно вертикальная и горизонтальная скорость материальной точки в зоне разрыва.

Таким образом, угол дилатансии  $\psi$  представляет собой угол подъема в полосе сдвига.

### О доработке модели плоской деформации для охвата трехмерных напряженных состояний

Вермеер и Де Борст указывают, что расширение модели плоской деформации для охвата трехмерных напряженных состояний является достаточно простым, в особенности для критерия разрушения Мора – Кулона, хотя в некоторых точках поверхности текучести могут возникнуть определенные трудности.

Для этого авторы предлагают переписать функцию текучести в терминах главных напряжений.

Для максимального ( $\sigma_1$ ) и минимального ( $\sigma_3$ ) главных напряжений

$$\sigma_1 = -(\sigma^* + \tau^*), \quad \sigma_3 = -(\sigma^* - \tau^*) \quad (28)$$

можно заменить уравнение (8) эквивалентной формулой:

$$f = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \sin \phi - c \cos \phi. \quad (29)$$

Текучесть имеет место, если:

$$f = 0 \quad \text{и} \quad \dot{f} = 0. \quad (30)$$

Условие текучести  $f=0$  описывает «угловую» (имеющую углы в поперечном сечении) поверхность текучести в пространстве главных напряжений, как показано на рис. 4.

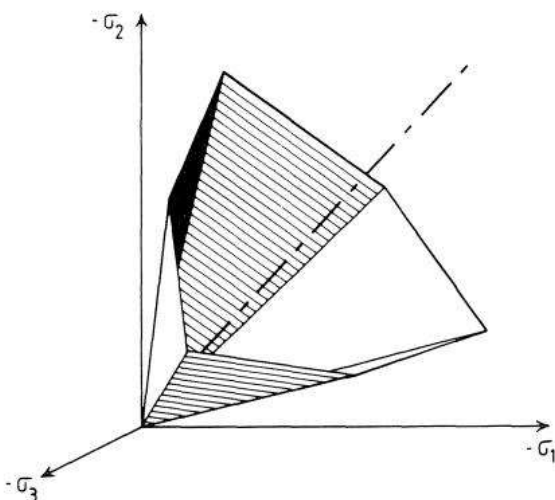


Рис. 4. Поверхность текучести Мора – Кулона в пространстве главных напряжений



Авторы напоминают, что многие исследователи выполнили истинно трехосные испытания с целью эмпирического определения поверхности текучести, но, к сожалению, результаты разных испытаний дали несколько разные поверхности – видимо, из-за влияния использованных типов трехосных приборов. Некоторые устройства имеют жесткие штампы на всех шести сторонах образца, другие имеют гибкие заполненные жидкостью оболочки по бокам или комбинации того и другого.

Вермеер и Де Борст считают наиболее надежными те типы приборов, в которых условия со всех сторон образца одинаковы. Результаты испытаний песка, которые были получены в таком устройстве Голдшайдером (Goldscheider, 1984), показаны экспериментальными точками в виде белых кружков на рис. 5, а. Эти результаты практически не отклоняются от описываемой критерием Кулона предельной поверхности (изображенной в виде сплошного углового контура).

Эксперименты с образцами бетона, выполненные, например, Герстлом и др. (Gerstle et al., 1978), показали такую же тенденцию, хотя кривизна их результатов была выше. Однако для большинства инженерных целей наблюдавшиеся отклонения от кулоновской поверхности были недостаточно велики и не требовали введения более сложной предельной поверхности.

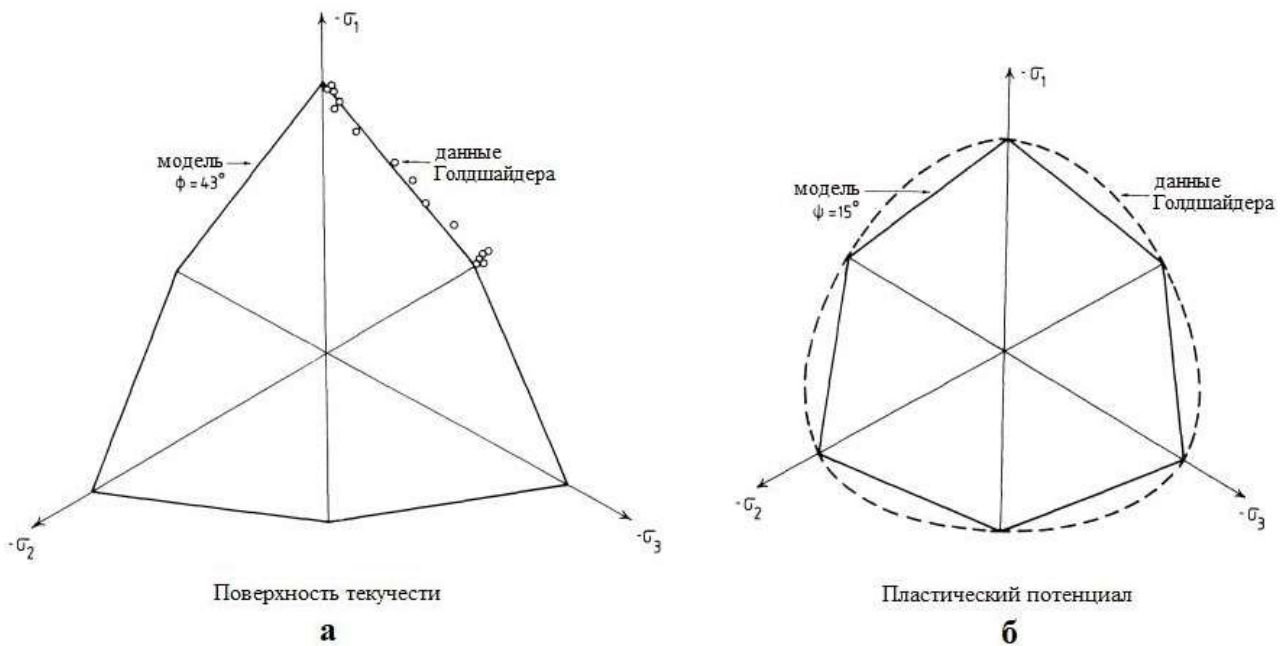


Рис. 5. Рассмотренная модель в сравнении с данными истинных трехосных испытаний плотного песка

Авторы отмечают, что для случаев, представленных на рис. 4 и 5,  $\sigma_2$  не обязательно является промежуточным главным напряжением.

Из уравнения (29) видно, что  $\sigma_2$  не влияет на условия текучести. Это свойство является заметной характеристикой критерия разрушения Мора – Кулона. Кроме того, закон пластического течения для критерия Мора – Кулона (а также для полученного критерия Треска) предсказывает, что в направлении промежуточного главного напряжения отсутствует пластическая деформация. Это можно вывести, записав формулу для

пластического потенциала (17) также в терминах главных напряжений. Аналогично уравнению (29) можно получить:

$$g = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \sin \psi + \text{const} . \quad (31)$$

Дифференцируя это уравнение по главным напряжениям, можно записать для скоростей главных пластических деформаций:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1^p \\ \dot{\varepsilon}_2^p \\ \dot{\varepsilon}_3^p \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(1 - \sin \psi) \\ 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \sin \psi) \end{bmatrix}, \quad (32)$$

что доказывает верность приведенного выше утверждения.

Наблюдение о том, что промежуточное главное напряжение  $\sigma_2$  не влияет на критерий текучести Мора – Кулона, делает довольно простым обобщение для трехмерных напряженных состояний.

Вектор напряжений и вектор деформаций для трехмерной ситуации имеют соответственно следующие составляющие:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx})^T, \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx})^T. \quad (34)$$

Аналогичным образом матрица упругости  $D$  может быть скорректирована для формирования матрицы 6x6 вместо 4x4. Для любого заданного напряженного состояния  $\boldsymbol{\sigma}$  мы можем вычислить главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и распределить их так, чтобы соблюдалось условие:

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3. \quad (35)$$

Затем авторы предлагают использовать  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  и подставить их в условие текучести (29), чтобы проверить, имеет ли место пластичность. Если да, то для расчета главных скоростей пластических деформаций можно использовать уравнение (32).

В действительности, как указывают Вермеер и Де Борст, нас должны интересовать не столько главные, сколько обычные скорости пластических деформаций, поскольку поставлена цель отследить направление, в котором происходит пластическое деформирование, в декартовой системе координат  $(X, Y, Z)$ . Для этого надо выразить величины  $\sigma^*$  и  $\tau^*$  в инвариантах напряженного состояния  $p, J_2$  и  $\theta$ :

$$\sigma^* = \sqrt{J_2} \cos \theta - p, \quad (36)$$

$$\tau^* = \sqrt{\frac{1}{3}J_2} \sin \theta,$$

где

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2],$$

$$\sin 3\theta = -\frac{\sqrt{3}(\sigma_1 - p)(\sigma_2 - p)(\sigma_3 - p)}{J_2\sqrt{J_2}}.$$

При использовании этих выражений для  $\sigma^*$  и  $\tau^*$  формула для пластического потенциала становится следующей:

$$g = \sqrt{J_2} \cos \theta - [\sqrt{\frac{1}{3}J_2} \sin \theta - p] \sin \psi + \text{const}. \quad (37)$$

Отсюда могут быть получены скорости пластических деформаций путем дифференцирования.

Далее авторы использовали данные Голдшайдера (Goldscheider, 1984), который измерил направление приращения пластической деформации незадолго до момента достижения пиковой прочности. Эти результаты для пластического потенциала показаны штриховым контуром на рис. 5, б. Он довольно хорошо соответствует ломаному контуру для  $g$ , который определяется уравнением (37).

Осложнение возникает, если два из главных напряжений равны между собой (если или  $\sigma_1 = \sigma_2$ , или  $\sigma_2 = \sigma_3$ ). Положим,  $\sigma_2 = \sigma_3$ , как при обычных трехосных испытаниях. Тогда исчезают два условия текучести:

$$f_1 = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \sin \phi - c \cos \phi = 0, \quad (38)$$

$$f_2 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1) \sin \phi - c \cos \phi = 0.$$

В такой точке, в которой имеет место пластическое течение в соответствии с двумя условиями текучести, общая скорость пластической деформации может рассматриваться как сумма отдельных вкладов любого из двух законов пластического течения в соответствии с выкладками Койтера (Koiter, 1960). Таким образом:

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial \sigma}. \quad (39)$$

Так что надо определить два множителя:  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Функции пластического потенциала  $g_1$  и  $g_2$  определяются аналогично  $f_1$  и  $f_2$ :

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \sin \psi + \text{const}, \\ g_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1) \sin \psi + \text{const}. \end{aligned} \quad (40)$$

При использовании этих функций из уравнения (39) следует, что:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1^p &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(-1 + \sin \psi), \\ \dot{\epsilon}_v^p &= (\lambda_1 + \lambda_2) \sin \psi. \end{aligned} \quad (41)$$

Отсюда получается:

$$\sin \psi = \dot{\epsilon}_v^p / (-2\dot{\epsilon}_1^p + \dot{\epsilon}_v^p). \quad (42)$$

Вермеер и Де Борст отмечают, что описание того, как такие угловые точки должны обрабатываться в компьютерной программе, выходит за рамки их работы, но кратко указывают, что возможно несколько подходов. Один из классических подходов принадлежит Наяку и Зинкевичу (Nayak, Zienkiewicz, 1972) и заключается в использовании только одной функции текучести в сочетании со способом округления для точек, в которых встречаются две плоскости функции текучести (для так называемых угловых точек). Наяк и Зинкевич применяли другую процедуру, в которую было включено уравнение (39). Этот вопрос был более подробно рассмотрен в более ранних работах Де Борста (De Borst, 1982)

### О соотношении между приращениями напряжений и деформаций

Чтобы выразить определяющую модель в виде матричного уравнения, авторы подставляют выражение (15) в формулу (6) и получают:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}\dot{\epsilon} - \lambda \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}, \quad (43)$$

где, как уже указывалось выше,  $\lambda=0$  для упругих состояний и для разгрузки. А для случая нагружения, то есть при

$$f=0 \text{ и } \dot{f}=0, \quad (44)$$

множитель  $\lambda$  можно рассчитать из условия, что элемент в этот момент остается в пластическом состоянии. Для неупрочняющегося материала это так называемое условие непротиворечивости записывается следующим образом:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} \dot{\sigma}_{xx} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}} \dot{\sigma}_{yy} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}} \dot{\sigma}_{xy} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}} \dot{\sigma}_{zz} = 0, \quad (45)$$

или в матричном виде:

$$\dot{f} = \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = 0. \quad (46)$$

Теперь выражение для множителя  $\lambda$  можно получить путем подстановки уравнения (43) в условие непротиворечивости. Это дает следующие уравнения:

$$\dot{f} = \mathbf{b}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \lambda d = 0, \quad (47)$$

где

$$\mathbf{b}^T = \left( \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D}, \quad (48)$$

$$d = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{a}. \quad (49)$$

Авторы отмечают, что эти уравнения только на первый взгляд не очень хорошо поддаются решению. Но на самом деле, например, для условия разрушения Мора – Кулона можно легко заключить, что

$$d = G \left( 1 + \frac{\sin \psi \sin \phi}{1 - 2\nu} \right), \quad (50)$$

где  $G$  – модуль упругости при сдвиге (модуль сдвига).

Закон зависимости напряжений от деформаций в конце концов получается путем подстановки выражения для множителя  $\lambda$  в уравнение (43):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[ \mathbf{D} - \frac{1}{d} \mathbf{a} \mathbf{b}^T \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (51)$$

Вермеер и Де Борст указывают, что это уравнение не может быть аналитически проинтегрировано для получения результирующих напряжений для заданной истории деформаций, поэтому необходимы численные методы. Для этого доступны многие численные алгоритмы, начиная от простого пошагового использования метода Эйлера до применения неявных схем, которые учитывают производные более высоких порядков. При этом, как подчеркивают авторы, выбор схемы интегрирования, особенно для чувствительных к давлению материалов, очень важен и может существенно повлиять на результаты.

### Об идеально пластической модели

Чтобы избежать угловой формы поверхности текучести Кулона, было предложено несколько аппроксимаций (приближений). Вермеер и Де Борст считают самым простым вариантом прямой круговой конус Друкера – Прагера (1952), но отмечают, что он, к сожалению, плохо аппроксимирует кулоновскую поверхность для более высоких значений угла внутреннего трения, скажем для  $\phi > 30$  град., как у песка, бетона или скальных пород. Для больших значений  $\phi$  получается почти треугольный конус, а не близкий к круговому (см. рис. 5, а). Но все же аппроксимация Друкера – Прагера может



быть полезна, например, для текучепластичных глин с низкими углами внутреннего трения.

Более точные гладкие поверхности текучести были предложены Ладе и Дунканом (Lade, Duncan, 1975), а также Мацуокой и Накаи (Matsuoka, Nakai, 1982). Дальнейшее обсуждение гладких и угловых поверхностей авторы пообещали выполнить в одном из следующих разделов.

Наиболее важным Вермеер и Де Борст считают принятие идеальной пластичности в качестве первого приближения (грубой аппроксимации) для оценки поведения реальных зернистых материалов. Это первое приближение с точки зрения авторов полезно в основном для трех целей:

- для расчета предельных нагрузок (ведь более сложные модели, как правило, занимают больше компьютерного времени, в то время как предельные нагрузки рассчитываются с их помощью не намного точнее);
- для оценки смещений и напряжений в неоднородных массивах дисперсных и скальных грунтов, если для них имеется относительно мало данных и поэтому нет смысла применять более сложные модели;
- в качестве хорошего введения в изучение поведения зернистых материалов.

По умолчанию принимается еще одна важная идеализация (допущение). При выборе декартовых координатных осей в направлениях главных напряжений рассматриваемая модель дает

$$\dot{\gamma}_{xy}^p = 0 \quad (52)$$

независимо от использованных приращений напряжений.

Для этой модели скорости пластических деформаций коаксиальны (соосны) с осями главных напряжений, что подходит для невращающихся осей напряжений (как в большинстве испытательных приборов), но нерационально, если оси вращаются и происходят отклонения от коаксиальности. Для более подробного рассмотрения этого вопроса авторы предлагают читателям ознакомиться с публикациями Де Йосселина де Йонга (De Josselin de Jong, 1971), Рудницкого и Райса (Rudnicki, Rice, 1975), Вермеера (Vermeer, 1981), Аллерсмы (Allersma, 1982).

Однако во всей рассматриваемой работе Вермеер и Де Борст применяют идеализацию в виде коаксиальности, поскольку она облегчает разработку и использование моделей пластического деформирования в компьютерных программах, использующих метод конечных элементов. Тем не менее, учитывая продолжающееся увеличение возможностей численных методов, авторы ожидают, что в будущем будут использоваться и некоаксиальные модели.

*Продолжение обзора работы Вермеера и Де Борста будет приведено в следующей части.*

## Список литературы

1. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 1. Общее содержание // Geoinfo.ru. 17.06.2019. URL:

- <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-1-obshchee-soderzhanie-40928.shtml>
2. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 2. О дилатансии и трехосных испытаниях // Geoinfo.ru. 25.06.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-2-41014.shtml>.
  3. *Vermeer P.A., De Borst R.* Non-associated plasticity for soils, concrete and rock // *Heron*. 1984. Vol. 29. № 3. URL: <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:4ee188ab-8ce0-4df3-adf5-9010ebfaabf0>.

**Заглавное фото:** АО «МОСТДОРГЕОТРЕСТ»