

Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 7

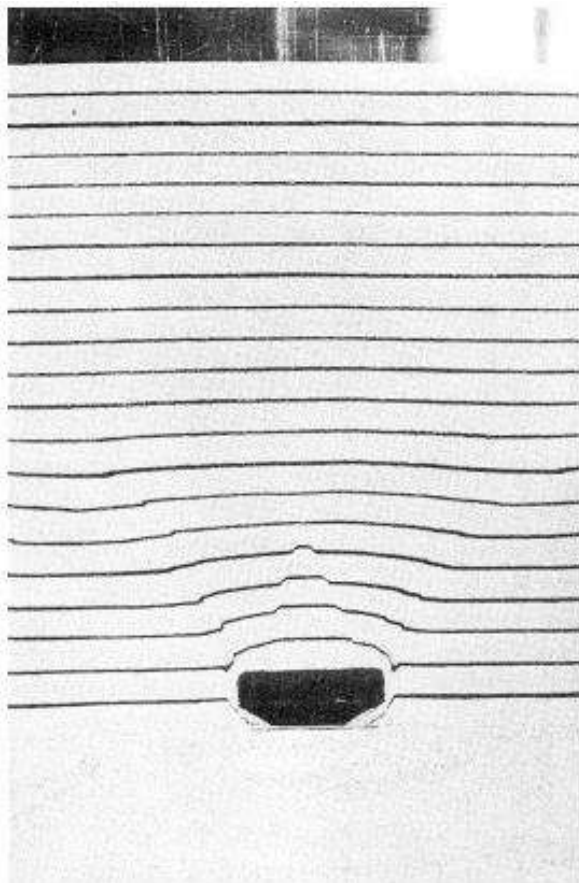


Продолжаем публикацию обзора работы П.А. Вермеера и Р. Де Борста «Неассоциированная пластичность для дисперсных грунтов, бетона и скальных пород» [7], напечатанной в 1984 году в журнале *Heron* (Нидерланды) на английском языке. В первой части [1] мы кратко описали общее содержание этой работы, во второй [2] подробнее остановились на дилатансии и трехосных испытаниях, в третьей [3] – на модели, пренебрегающей эффектами упрочнения и разупрочнения (так называемой неупрочняющейся модели), в четвертой [4] – на некоторых последствиях неассоциированной пластичности, в пятой [5] – на изотропном упрочнении, в шестой [6] – на унифицированной модели поведения дисперсных и цементированных зернистых материалов при монотонном нагружении с учетом упрочнения и разупрочнения. Здесь речь пойдет о формировании полосы сдвига.

Аналитическая служба  
[info@geoinfo.ru](mailto:info@geoinfo.ru)

Об экспериментальных данных по полосам сдвига

Вермеер и Де Борст в рассматриваемой работе [7] напоминают читателям, что для зернистых материалов, а также для металлов довольно регулярно наблюдается, что плавно изменяющаяся картина деформации внезапно изменяется и все дальнейшие деформации локализуются в узких полосах сдвига. Это происходит, например, при обрушении насыпей, дамб, потере несущей способности грунтовых анкеров (рис. 1) и т.д. Деформации в плотных песчаных отложениях и в скальных горных породах часто происходят преимущественно в полосах сдвига. Типичный пример приведен на рисунке 2, на котором показан результат испытания в узкой вертикальной коробке, заполненной слоями плотного песчаного грунта, разделенными тонкими прослоями окрашенного песка. В этом эксперименте гибкое дно коробки было поднято в виде арки равномерной кривизны для имитации определенного геологического процесса. Из рисунка 2 видно, что полученная картина деформации полностью определяется большим количеством полос сдвига.



**Рис. 1.** Механизм деформирования отложений, вмещающих грунтовый анкер, с образованием полос сдвига



**Рис. 2.** Гребневидные сдвиги над аркой равномерной кривизны, смоделированные Мандлом (Mandl, 1984) в коробке, заполненной слоями плотного песка

В большинстве публикаций по механике грунта полоса сдвига называется поверхностью скольжения или поверхностью разрыва. Традиционное представление состоит в том, что при небольшом сжимающем напряжении полоса сдвига образует угол

$$\theta = 45^\circ + 1/2 \varphi. \quad (1)$$

Однако эксперименты Артура с соавторами (Arthur et al., 1977) и Вардолакиса (Vardoulakis, 1980) дали меньший угол наклона, а именно

$$\theta = 45^\circ + 1/4 (\varphi + \psi). \quad (2)$$

Далее Вермеер и Де Борст используют модель упрочнения-разупрочнения, чтобы теоретически получить данные, совпадающие с экспериментальными.

### Основные уравнения

Авторы отмечают, что полоса сдвига имеет небольшую конечную толщину. В песчаном горизонте (образце) ее толщина примерно в 20 раз превышает средний размер отдельной частицы, равный нескольким миллиметрам.

Далее Вермеер и Де Борст снова рассматривают плоские деформации, чтобы иметь четыре компонента напряжения и четыре компонента деформации (см. часть 3 [3]). Для модели упрочнения-разупрочнения в предыдущей части [6] приводилось следующее определяющее соотношение:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \mathbf{D}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (3)$$

откуда

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left\{ \mathbf{D}^{-1} + \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (4)$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\dot{\varepsilon}_{xx} \quad \dot{\varepsilon}_{yy} \quad \dot{\gamma}_{xy} \quad \dot{\varepsilon}_{zz})^T,$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\dot{\sigma}_{xx} \quad \dot{\sigma}_{yy} \quad \dot{\sigma}_{xy} \quad \dot{\sigma}_{zz})^T,$$

$h$  – модуль упрочнения,

$\mathbf{D}^{-1}$  – матрица упругой податливости, определяемая формулой

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & -\nu \\ -\nu & 1 & 0 & -\nu \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ -\nu & -\nu & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$f$  – функция текучести, для которой при разработке модели упрочнения-разупрочнения в предыдущей части [6] приводилась следующая формула:

$$f = \tau^* - \sigma^* \sin \phi^* - c^*, \quad (6)$$

$g$  – функция пластического потенциала, для которой при разработке модели упрочнения-разупрочнения в предыдущей части [6] приводилась следующая формула:

$$g = \tau^* - \sigma^* \sin \psi^* + \text{const}. \quad (7)$$

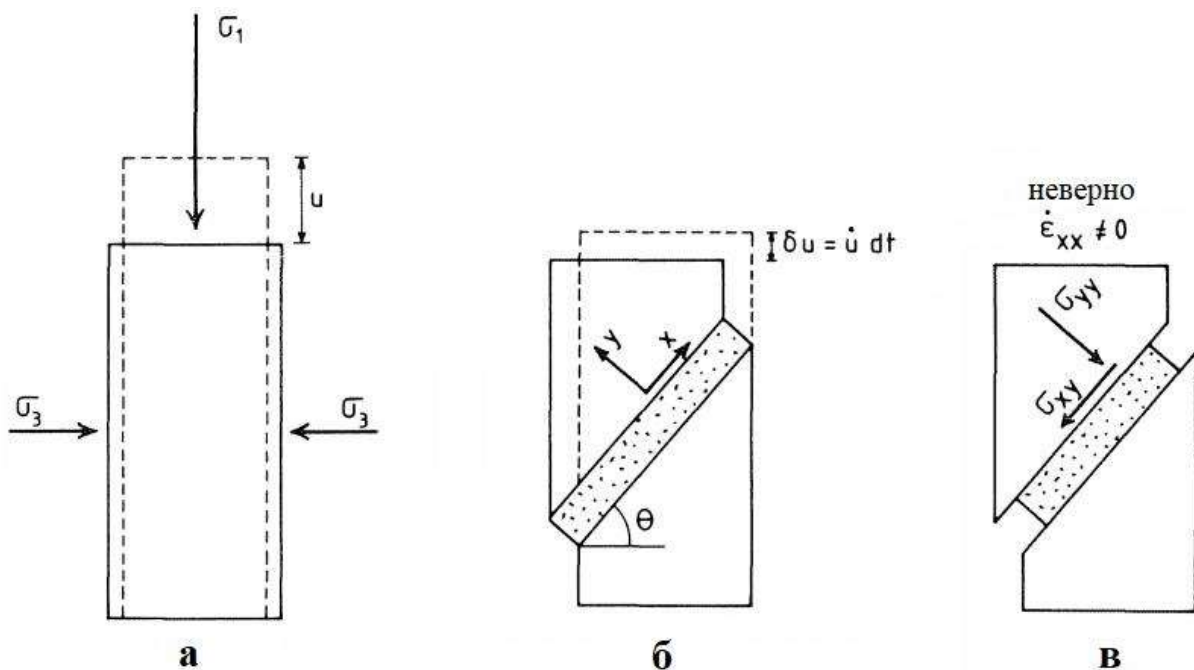
Далее, как указывают авторы, понадобятся первое и последнее из четырех уравнений матричного уравнения (4). В более полной форме их можно записать так:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xx} = & \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{xx}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} \right) \dot{\sigma}_{xx} + \\ & + \left( \frac{-\nu}{E} + \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{xx}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}} \right) \dot{\sigma}_{yy} + \\ & + \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{xx}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}} \dot{\sigma}_{xy} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{zz} ; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\dot{\epsilon}_{zz} = -\frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{xx} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{yy} + \frac{1}{E} \dot{\sigma}_{zz} , \quad (9)$$

где был использован тот факт, что  $\sigma_{zz}$  является промежуточным главным напряжением, так что  $\partial f / \partial \sigma_{zz}$  и  $\partial g / \partial \sigma_{zz}$  исчезли.

Затем Вермеер и Де Борст рассматривают однородный элемент зернистого материала, как показано на рис. 3, а. Этим элементом может быть образец, который нагружается в двухосном или трехосном приборе. Напряжения и деформации являются довольно однородными по всему образцу вплоть до некоторой критической точки, однако за ее пределами все дальнейшие деформации локализуются в полосе сдвига, как показано на рис. 3, б; при этом принимается, что материал вне этой полосы ведет себя жестко.



**Рис. 3.** Однородная деформация до текущего состояния (а); дальнейшая деформация, локализованная в полосе сдвига (б); неверный механизм (в) (ось X для удобства была взята в направлении полосы сдвига)

Механизм формирования полосы сдвига имеет кинематические ограничения

$$\dot{\epsilon}_{xx} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{zz} = 0, \quad (10)$$

которые вызваны тем, что скачкообразные смещения происходить не могут (рис. 3, в).

В дополнение к кинематическим условиям есть условия равновесия. За пределами полосы сдвига материал больше не деформируется, поэтому напряжения вне этой полосы должны оставаться постоянными. Внутри нее могут быть изменения напряжений, но эти изменения не могут быть произвольными, поскольку должно быть равновесие на границах. Следовательно, напряжения внутри полосы сдвига должны удовлетворять условиям:

$$\dot{\sigma}_{xy} = 0, \quad \dot{\sigma}_{yy} = 0, \quad (11)$$

поскольку мы можем иметь скачки только для нормальных напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{zz}$  (рис. 4).

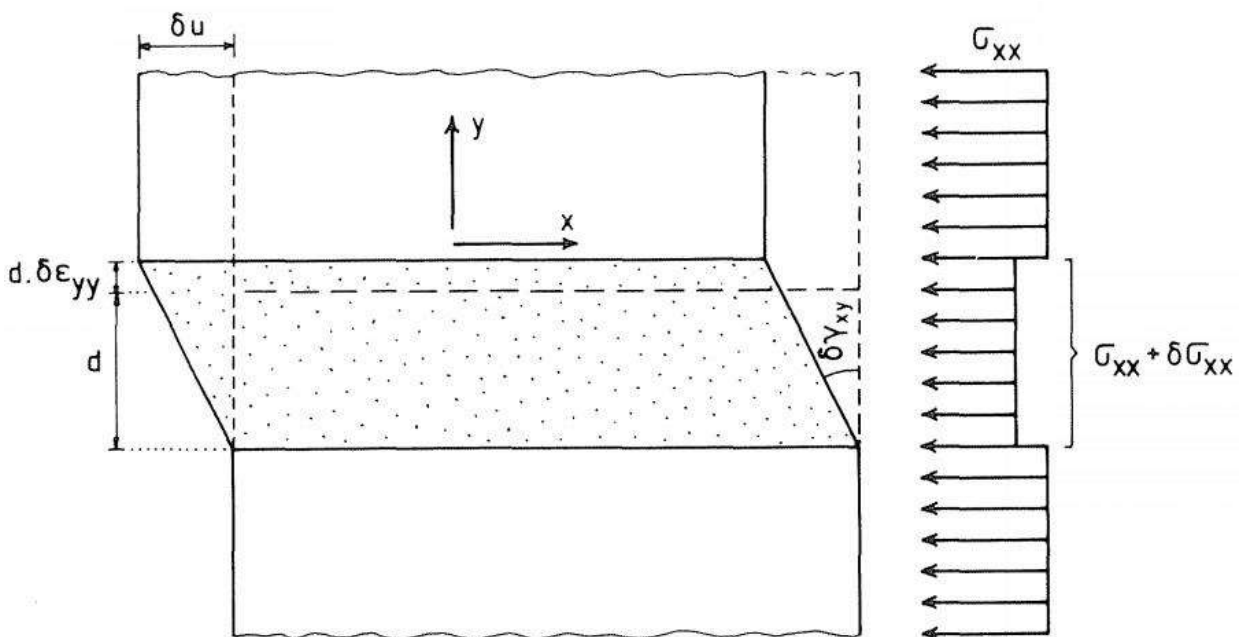
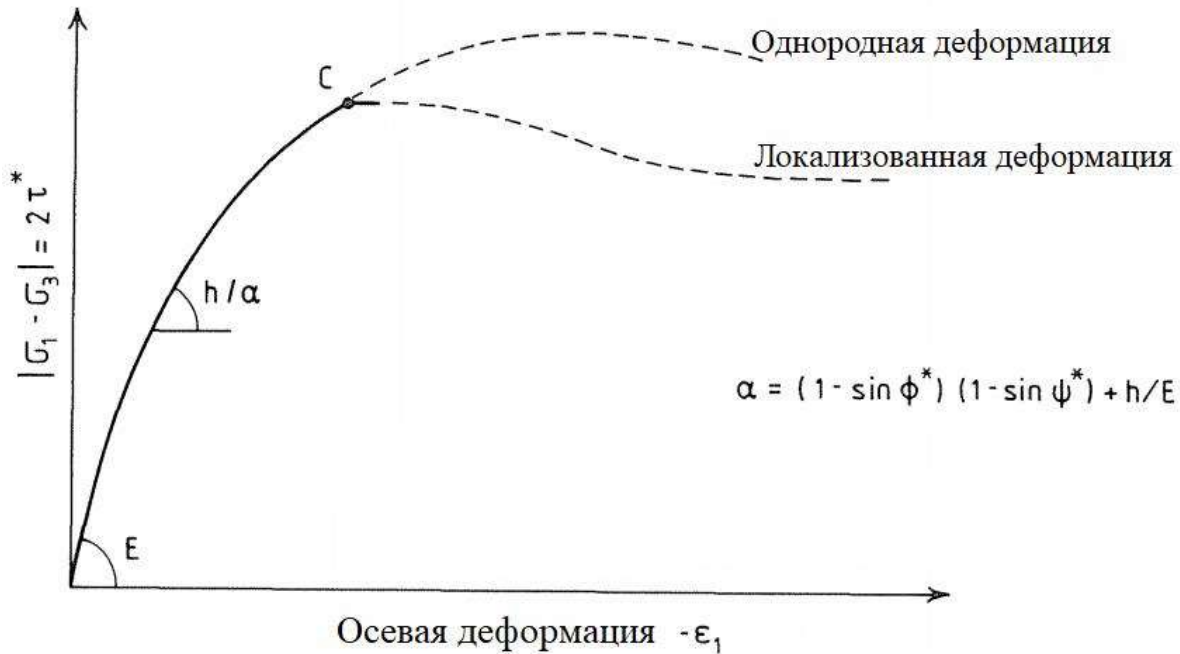


Рис. 4. Скачки напряжений на границах полосы сдвига

### Вывод уравнений

Пусть текущее состояние образца характеризуется точкой С на кривой «напряжение – деформация», показанной на рис. 5. До нее образец деформируется однородно, но в самой этой точке происходит так называемая бифуркация и начинает развиваться полоса сдвига.



**Рис. 5.** Возможное послебифуркационное поведение деформируемого образца

Критическое значение модуля упрочнения, при котором может начать развиваться полоса сдвига, и угол наклона этой полосы можно определить, вставив определяющие уравнения (8) и (9) в кинематические ограничения (10). Вместе с условием равновесия (11) это даст:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{xx}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} \right) \dot{\sigma}_{xx} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{zz} = 0, \quad (12)$$

$$\dot{\epsilon}_{zz} = -\frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{xx} + \frac{1}{E} \dot{\sigma}_{zz} = 0. \quad (13)$$

Вставив выражение (13) в уравнение (12), получим:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \left\{ \frac{1 - \nu^2}{E} + \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{xx}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} \right\} \dot{\sigma}_{xx} = 0. \quad (14)$$

Частный случай, когда

$$\dot{\sigma}_{xx} = 0, \quad (15)$$

является, как отмечают авторы, тривиальным решением, которое здесь не представляет особого интереса.

Другие решения задаются уравнением для полосы сдвига:

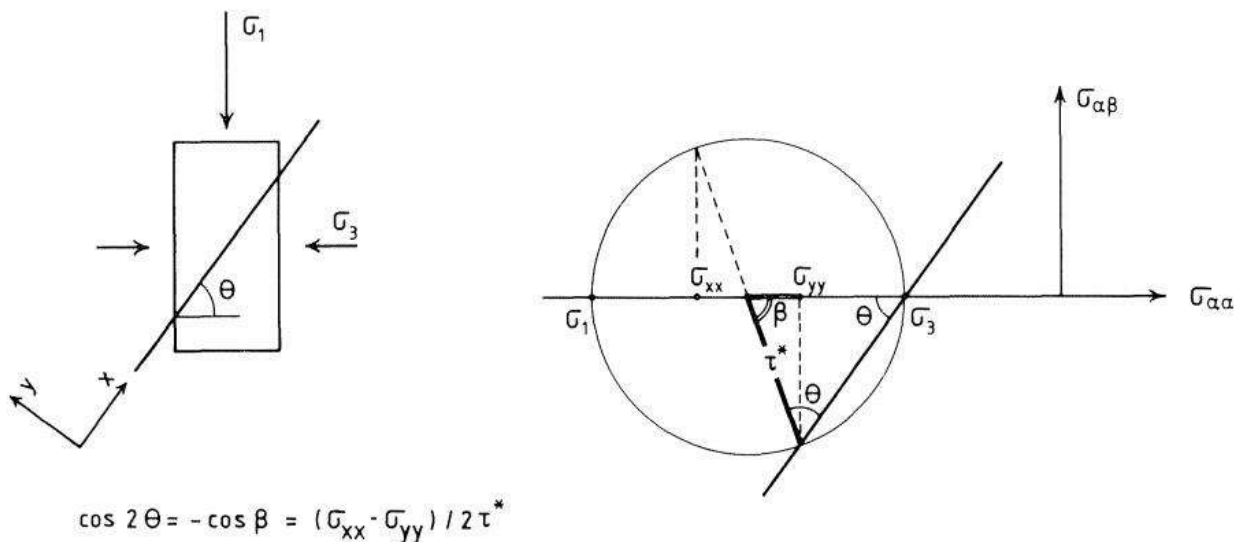
$$h = \frac{-E}{1 - \nu^2} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{xx}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} \quad (16)$$

Дифференциалы определяются следующими уравнениями (путем дифференцирования функций  $f$  и  $g$ , формулы для которых приведены в начале этой части):

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau^*} + \sin \phi^* \right), \quad (17)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau^*} + \sin \psi^* \right). \quad (18)$$

Первые слагаемые в скобках в этих уравнениях относятся к углу наклона полосы сдвига  $\theta$ , что продемонстрировано с помощью круга напряжений Мора, изображенного на рис. 6.



**Рис. 6.** Угол наклона полосы сдвига  $\theta$  и круг напряжений Мора

Следовательно, можно написать:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{1}{2} (\cos 2\theta + \sin \phi^*), \quad (19)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{1}{2} (\cos 2\theta + \sin \psi^*). \quad (20)$$



Подставив выражения (19) и (20) в формулу (16), авторы получают относительно простое уравнение:

$$h = \frac{-E}{4(1-\nu^2)} (\cos 2\theta + \sin \psi^*)(\cos 2\theta + \sin \phi^*), \quad (21)$$

или для  $\cos 2\theta$ :

$$\cos 2\theta = -\frac{1}{2}(\sin \phi^* + \sin \psi^*) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sin \phi^* - \sin \psi^*)^2 - 16(1-\nu^2)h/E}. \quad (22)$$

Уравнение (22) показывает, что угол наклона  $\theta$  сильно зависит от текущего модуля упрочнения, что продемонстрировано на рис. 7.

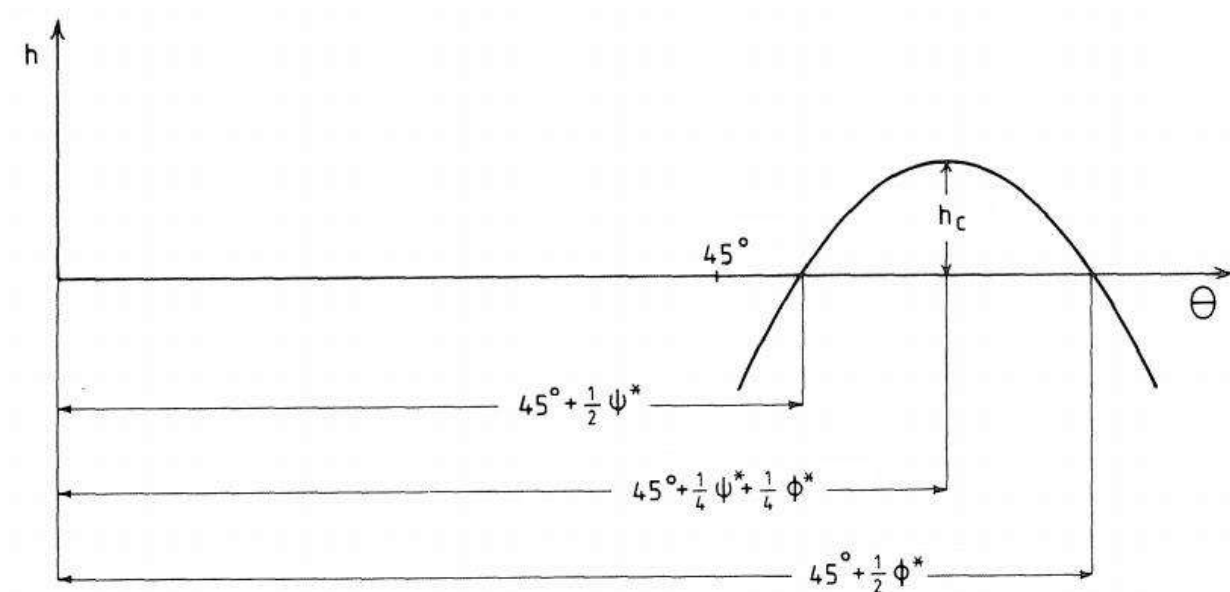


Рис. 7. Зависимость модуля упрочнения  $h$  от угла наклона полосы сдвига  $\theta$

Вермеер и Де Борст отмечают, что при больших значениях модуля упрочнения  $h$ , то есть в начале нагружения, полосы сдвига не могут развиваться (они могут формироваться, только если уравнение (22) имеет реальное решение). Критическое значение модуля упрочнения  $h_c$ , для которого возможно образование полосы сдвига, определяется из того условия, что выражение под квадратным корнем имеет неотрицательный знак. Отсюда:

$$h_c = \frac{E(\sin \phi^* - \sin \psi^*)^2}{16(1-\nu^2)}. \quad (23)$$

Тогда, то есть для  $h=h_c$ , уравнение (22) имеет единственное решение для угла наклона полосы сдвига  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= -\frac{1}{2}(\sin \phi^* + \sin \psi^*) = \\ &= -\sin\left(\frac{1}{2}\phi^* + \frac{1}{2}\psi^*\right) \cos\left(\frac{1}{2}\phi^* - \frac{1}{2}\psi^*\right), \end{aligned} \quad (24)$$

или

$$\sin(90^\circ - 2\theta) = -\sin\left(\frac{1}{2}\phi^* + \frac{1}{2}\psi^*\right) \cos\left(\frac{1}{2}\phi^* - \frac{1}{2}\psi^*\right). \quad (25)$$

Эти уравнения можно далее упростить, зная, что разность между мобилизованным углом внутреннего трения и мобилизованным углом дилатансии редко превышает 30 град. Следовательно, множитель

$$\cos\left(\frac{1}{2}\phi^* - \frac{1}{2}\psi^*\right) \quad (26)$$

находится в диапазоне от 0,96 до 1,00. Таким образом, мы можем опустить его в уравнениях (24), (25) и получить следующий угол наклона полосы сдвига:

$$\theta \approx 45^\circ + \frac{1}{4}(\phi^* + \psi^*) \quad \text{для } h = h_c, \quad (27)$$

что равно экспериментальным значениям, приведенным Артуром с соавторами (Arthur et al., 1977) и Вардолакисом (Vardoulakis, 1980).

Во многих испытательных приборах механизм формирования полосы сдвига не может происходить точно так, как представлено на рис. 3, б, потому что фрикционные торцевые штампы предотвращают горизонтальное смещение материала. Даже небольшое трение на них может задержать образование полосы сдвига. Тогда складывается ситуация, в которой  $h < h_c$  и больше нет однозначно определяемого угла ее наклона. Вместо этого теперь возможны два различных угла наклона, как отражено в уравнении (22) и на рис. 7.

Особая ситуация возникает при  $h=0$ , когда уравнение (22) дает следующие решения:

$$\theta = 45^\circ + \frac{1}{2}\psi^*; \quad \theta = 45^\circ + \frac{1}{2}\phi^* \quad \text{для } h = 0. \quad (28)$$

То, какое именно решение будет иметь место, зависит от конкретных граничных условий и эффектов второго порядка. Авторы отмечают, что решение для

$$\theta = 45^\circ + \frac{1}{2}\psi^* \quad \text{соответствует условию } \dot{\sigma}_{xx} = 0. \quad (29)$$

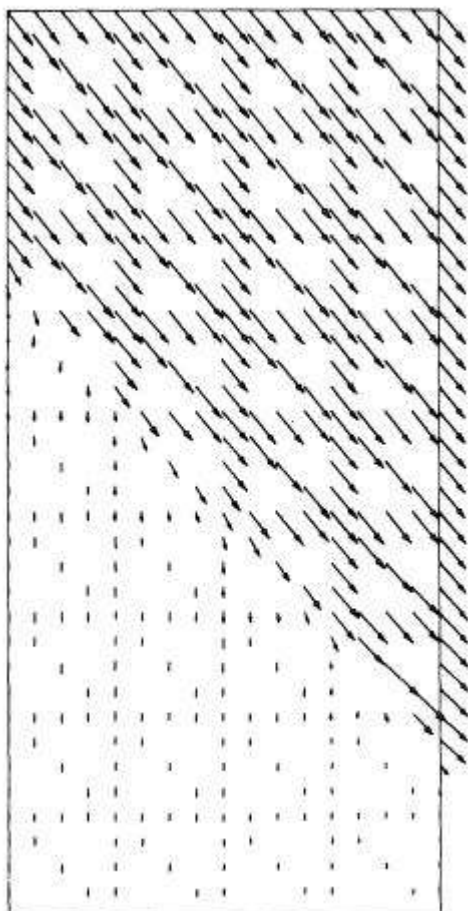
Таким образом, делают вывод Вермеер и Де Борст, неединственные решения (бифуркации) могут возникать, если

$$h \leq \frac{E(\sin \phi^* - \sin \psi^*)^2}{16(1 - \nu^2)}. \quad (30)$$

Следовательно, бифуркации возможны, когда модуль упрочнения  $h$  еще положителен.

Частный случай ассоциированной пластичности ( $\varphi^* = \psi^*$ ) является исключением. Тогда неединственные решения могут возникать только для  $h \leq 0$ , так что полоса сдвига не может развиваться в режиме упрочнения, а только при пиковой прочности и за ее пределами.

И наконец, как отмечают авторы, образование полос сдвига можно также моделировать путем численного анализа. Это показано на рис. 8.



**Рис. 8.** Поле скоростей деформирования для двухосного испытания (плоской деформации) с образованием полосы сдвига, полученное численным методом

### Предыдущие исследования

Вермеер и Де Борст сообщают, что уравнение (23) для критического модуля упрочнения было впервые получено Манделом в его статье 1964 года (Mandel, 1964). Но та работа была несколько сложна для восприятия и привлекла относительно мало внимания. Кроме того, в ней были учтены проявления инерционных сил, что усложнило анализ. Поэтому, вероятно не зная о работе Мандела, Рудницкий и Райс (Rudnicki, Rice, 1975) представили аналогичный анализ для скального грунта. Полученная ими формула для критического модуля упрочнения отличается от уравнения (23), так как они использовали критерий текучести Друкера – Прагера (Drucker, Prager). Рудницкий и Райс также показали,

что традиционная формула для малых деформаций достаточно точна для анализа полосы сдвига, что оправдывает представленный подход.

В 1980 году Вардолакис также использовал критерий текучести типа Мора – Кулона, но его модель не была полностью эквивалентна модели упрочнения-разупрочнения, разработанной в рассматриваемой работе Вермеера и Де Борста [7]. Используя большой анализ градиентов скоростей, он вывел довольно сложное условие для критического модуля упрочнения, но пришел к тому же простому уравнению (27) для угла наклона полосы сдвига.

Следовательно, условие для критического модуля упрочнения  $h_c$  было впервые получено Манделом, а выражение для угла наклона полосы сдвига  $\theta$  было впервые представлено Вардолакисом. А приведенный здесь анализ, который дал оба уравнения, был выполнен Вермеером в 1982 году (Vermeer, 1982). В отличие от Мандела Вермеер не учитывал проявления инерционных сил. А в отличие от Вардолакиса он пренебрег дополнительными условиями для больших градиентов скоростей деформирования.

Отметим, что ссылки на статьи упомянутых выше авторов приведены в списке литературы в конце рассматриваемой работы [7].

*Продолжение обзора работы Вермеера и Де Борста [7] будет приведено в следующей части.*

## Список литературы

1. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 1. Общее содержание // Geoinfo.ru. 17.06.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-1-obshchee-soderzhanie-40928.shtml>.
2. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 2 // Geoinfo.ru. 25.06.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-2-41014.shtml>.
3. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 3 // Geoinfo.ru. 08.07.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-3-41059.shtml>.
4. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 4 // Geoinfo.ru. 15.07.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-4-41085.shtml>.
5. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 5 // Geoinfo.ru. 24.07.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-5-41127.shtml>.
6. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 6 // Geoinfo.ru. 29.07.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-6-41143.shtml>.

7. Vermeer P.A., De Borst R. Non-associated plasticity for soils, concrete and rock // Heron. 1984. Vol. 29. № 3. URL: <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:4ee188ab-8ce0-4df3-adf5-9010ebfaabf0>.

**Заглавное фото:** <https://m.168.ru/public.html?id=1590>